MODELAGEM PARA ALOCAÇÃO DE SALAS DE AULA EM UMA INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR

Roberto Ramos de Morais – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Daniela Aro Silva – Fatec Carapicuíba

Resumo

A ocupação de espaços disponíveis da melhor forma possível é uma preocupação constante em qualquer tipo de organização. Ao se referir a organizações de ensino, esta é uma situação sazonal, com repetibilidade semestral, na maioria dos casos. Assim, voltado para o estudo de alocação de salas de aula para disciplinas, este trabalho tem por objetivo geral apresentar um modelo para otimizar a ocupação de salas de aula em uma instituição hipotética. Como objetivo específico, têm-se discutir a aplicação de modelos de programação linear à otimização de redes na questão de alocação de espaços. O resultado mostra-se interessante e de fácil aplicação.
Palavras chaves: Otimização. Programação Linear. Alocação de salas.

Abstract

The occupation of spaces available optimally is a constant concern in any organization. When referring to educational organizations, this is a situation seasonal, with biannual repeatability in most cases. So, facing the allocation study classrooms for subjects, this work has the objective to present a model to optimize the occupation of classrooms in a hypothetical institution. Specific objectives were to have been discussing the application of linear models of the network optimization in the issue of space allocation schedule. The result shows it is interesting and easy to apply.
Key words: Optimization. Linear Programming. Allocation of rooms.

1 INTRODUÇÃO

A ocupação de espaços disponíveis da melhor forma possível é uma preocupação constante em qualquer tipo de organização. Ao se referir a organizações de ensino, esta é uma situação sazonal, com repetibilidade semestral, na maioria dos casos.

Assim, voltado para o estudo de alocação de salas de aula para disciplinas, este trabalho tem por objetivo geral apresentar um modelo para otimizar a ocupação de salas de aula em uma instituição hipotética.

Como objetivo específico, têm-se discutir a aplicação de modelos de programação linear à otimização de redes na questão de alocação de espaços.

Este artigo apresenta a seguinte estrutura:

a. Referencial teórico com os conceitos necessários à construção do modelo e à sua análise;
b. Procedimentos metodológicos;
c. Apresentação de resultados e análises; e
d. Considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados os conceitos de pesquisa operacional necessários ao desenvolvimento do modelo.

2.1 Programação Linear

Lachtermacher (2009) introduz a resolução de problemas de programação linear, que é uma programação matemática em que as funções objetivo e de restrições são lineares. Segundo Lachtermacher (2009):

> Um problema de programação linear está em sua forma padrão se tivermos uma maximização da função objetivo e se todas as restrições forem do tipo menor ou igual, bem como se os termos constantes e as variáveis de decisão assumirem valores não negativos (LACHTERMACHER, 2009, p. 20).

Para a resolução de um problema de programação linear é necessário ter o domínio das características básicas da modelagem de um problema. De acordo com Longaray (2013):

> Um modelo pode ser entendido como a representação matemática, simbólica ou descritiva, de um conjunto de eventos físicos, ou aspectos subjetivos, considerados importantes para determinado decisor em um contexto específico (LONGARAY, 2013, p. 6).

Em um modelo, de forma mais simplificada, possui restrições, variáveis de decisão, coeficientes e a função objetivo. As restrições são as limitações físicas do sistema e expressam as relações matemáticas existentes entre as variáveis do problema. As variáveis de decisão são as incógnitas encontradas pela resolução das restrições, estas indicam o desempenho de possíveis ações (LONGARAY, 2013). A função objetivo define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão.

Para facilitar a explicação de um problema de programação linear são introduzidos três tipos de padronização de terminologia. O primeiro é a solução, qualquer especificação de valores, dentro do domínio da função objetivo, f(x), para as variáveis de decisão, independentemente de se tratar de uma escolha desejável ou permissível. O segundo é a solução viável, que é uma solução em que todas as restrições são satisfeitas; e a terceira é a solução ótima, que é uma solução viável que tem o valor mais favorável da função objetivo, f(x), isto é, maximiza ou minimiza a função objetivo, podendo ser única ou não. (LACHTERMACHER, 2009).

A proporcionalidade, aditividade, divisibilidade e a certeza, são algumas hipóteses que é de onde parte todo o problema de programação linear. A proporcionalidade é quando a função objetivo é diretamente proporcional ao valor de cada variável de decisão. As aditividades, que é as variáveis de decisão, são consideradas entidades totalmente independentes, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função objetivo como nas restrições. A divisibilidade assume que qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor fracionário. A certeza quase nunca é satisfeita, provocando uma análise de sensibilidade nos resultados (LACHTERMACHER, 2009).

As hipóteses raramente são decoradas, até mesmo alguns autores de livros de programação linear não as citam, mas após de algum tempo estudando, os estudantes conseguirão identificar um problema com uma breve descrição do mesmo (COLIN, 2007).

Para a tomada de decisões, a pesquisa operacional dispõe de métodos, de acordo com Longaray (2013) "nos últimos cinquenta anos, um número significativo de estudos sobre a pesquisa operacional identificou a existência de um roteiro mínimo".

A sequência deste roteiro inicia-se com a determinação do problema, que consiste na identificação dos aspectos problemáticos percebíveis por pessoas que estão envolvidas no cenário decisório, para que alguma ação possa ser tomada. A segunda fase é a elaboração do modelo, nesta deve ser definida a técnica a ser utilizada para a resolução do problema e a delimitação do algoritmo matemático. Na fase resolução do modelo é aplicado o problema no algoritmo, com a determinação dos valores da solução ótima, nos modelos de otimização, ou das alternativas viáveis nos modelos de simulação. Ainda nesta fase, realiza-se a análise de sensibilidade, modificando valores finais de algumas das variáveis, a fim de verificar o comportamento restante do modelo. A próxima fase consiste em o decisor reconhecer que o modelo aplicado atende as necessidades, esta fase chama-se legitimação do modelo. Caso o modelo não atenda as necessidades, este deve ser revisto e passar por modificações. Por último é a implementação da solução, onde é posto em prática o algoritmo do modelo, que por base toma-se o modelo construído (LONGARAY, 2013).

Ainda segundo Longaray (2013):

> A literatura sobre a pesquisa operacional apresenta uma diversidade de modelos - sua maioria matemáticos - que variam de acordo com as características e as peculiaridades dos cenários de decisão. O sucesso na condução do processo decisório está diretamente relacionado à escolha correta do modelo que deve ser empregado (LONGARAY, 2013, p. 8).

Os modelos são classificados em dois grandes grupos, modelos de otimização e modelos de simulação. A representação matematicamente de um problema tem por objetivo apresentar uma solução mais viável para a tomada de decisão, isto é representado por um modelo de otimização (LONGARAY, 2013). A simulação é submeter modelos a ensaios para observar seus comportamentos.

Os modelos são a base para a resolução de problemas de programação linear, para Colin (2007):

> A qualidade de um modelo está muito relacionada com a significância das respostas oferecidas por ele e pouco relacionada com sua adesão à realidade. É muito comum que pessoas menos instruídas no assunto acreditem que um

> bom modelo é aquele que espelha com fidelidade a realidade. Nós, por outro lado, acreditamos que um bom modelo é aquele que consegue capturar as principais características do sistema a ser otimizado e que, com a maior simplicidade possível, gera uma solução que facilita em muito a tomada de decisões. (COLIN, 2007, p. 5).

Um problema que é apresentado por um modelo matemático, é resolvido por um dos algoritmos que resolvem problemas de programação linear. Um desses algoritmos (métodos) é o simplex, criado por Dantzig antes dos anos 1950.

Os métodos são para a aplicação dos modelos criados que tem por objetivo encontrar soluções para problemas de programação linear. De acordo com Colin (2007):

> Na programação linear, assim como em toda programação matemática, utiliza-se o termo solução para apresentar atribuições de valores às variáveis de decisão. Essa característica faz com que existam soluções viáveis, inviáveis e ótimas (COLIN, 2007, p. 7).

Uma solução viável é quando os valores das variáveis de decisão atendem todas as restrições. A solução inviável é quando o valor das variáveis de decisão não atende, ao menos, uma das restrições. A solução ótima "além de ser viável gera um valor de função objetivo extremo: maior valor dentre todos os existentes no caso da maximização e menor valor no caso da minimização" (COLIN, 2007).

2.2 Problemas de Transportes

Conforme Taha (2008), o problema de transporte é representado por uma rede na qual há m origem e n destinos, cada um deles um nó. Estes nós são ligados por arcos, designado pelos pares (i, j) de origem e destino, conforme mostra a Figura 1:

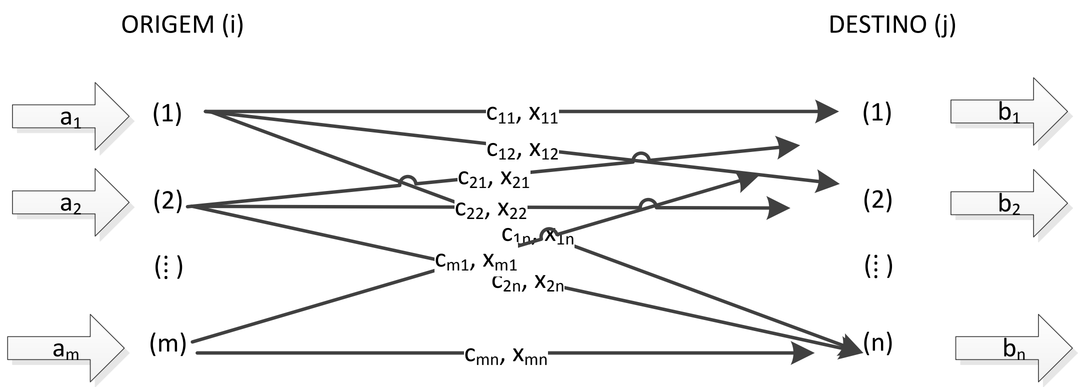


Figura 1: Problema de transporte com nós e arcos. Fonte: Taha (2008).

No problema de transporte, os parâmetros são:

- c_{ij}: custo de movimentação entre origem i e destino j.
- x_{ij}: a quantidade de material transportado entre origem i e destino j.
- a_i: a oferta de material na origem i.
- b_{ij}: a demanda de material no destino j.

Um dos métodos de resolução de redes de transportes é o método de Vogel, descrito por Passos (2008), também conhecido por método das penalidades, que consiste em fazer o transporte no arco de menos custos da linha ou coluna que apresenta a maior penalidade (diferença entre o maior e menos custo).

2.3 Designação

Um problema de designação "consiste em designar um conjunto de tarefas a um conjunto de máquinas, de forma a minimizar o custo total de designação" (BELFIORE, 2012, p. 267). De acordo com Belfiore e Fávero (2012):

> O problema de designação de tarefas pode ser modelado como um problema de transportes, em que os fornecedores correspondem às tarefas, e as demandas correspondem às máquinas. Como cada tarefa pode ser designada a apenas uma máquina, e cada máquina pode processar apenas uma tarefa, se o problema de designação for modelado como um problema de transportes, a capacidade de cada fornecedor e a demanda de cada cliente corresponderá a 1. Além disso, as varáveis de decisão do problema de designação passam a ser binárias (BELFIORE; FÁVERO, 2012, p. 267).

O problema de designação é um caso especial do problema de transporte. Conforme Arenales et al (2007), este é um problema que envolve a designação (ou atribuição de tarefas a agentes (mão de obra, máquinas, etc.). Cada agente só poderá realiza uma tarefa e cada tarefa só poderá ser realizada por um agente.

Os parâmetros do modelo de designação são:

- c_{ij} (custo de designar uma tarefa i a uma máquina j);
- as variáveis binárias de decisão x_{ij}.

A formulação geral da função objetivo é min z $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij}$ e as restrições são $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ (BELFIORE; FÁVERO, 2012; ARENALES et al, 2007; PASSOS, 2008)

Arenales et al (2007) apresenta o problema da designação generalizada, no qual a segunda restrição é modificada para $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i$, onde a_{ij} é a necessidade requerida de recurso e b_{ij} é a capacidade do recurso.

2.4 Programação inteira

Problemas que exigem resultados inteiros, desprezando soluções fracionadas das variáveis básicas referem-se à técnica da programação inteira (LEE, 1976). Quando somente algumas variáveis requerem valores inteiros tem-se um problema de programação inteira mista (WISTON, 1993).

De acordo com Lee (1976) e Caixeta-Filho (2012), a programação inteira requer as seguintes características:

a. uma função objetivo linear;
b. um conjunto linear de restrições;
c. restrição de não negatividade; e
d. restrições de valor inteiro para determinadas variáveis.

2.5 Outras abordagens

Alguns autores tratam deste assunto de maneira mais abrangente, como Silva, Sampaio e Alvarenga (2005) e Kripka e Kripka (2010), que utilizam a metaheurística *simmulated annealing* para resolver o problema de alocação de salas de aula em um horário. Os autores ressaltam que este é um problema do tipo *np-hardy*, ou seja, não é possível resolve-lo manualmente.

Para este mesmo tipo de problema, Belfiore e Fávero (2012) definem a modelagem do problema da mochila como a busca dentre n objetos quais serão carregados em uma mochila, considerando seu peso (p_i) e utilidade (c_i). A mochila apresenta uma capacidade máxima e o objetivo é maximizar a utilidade do carregamento.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho caracteriza-se pela construção de um modelo de pesquisa operacional de programação linear que resolva o problema de alocação de disciplinas em salas de aula. Entende-se por modelo o plano ou estratégia concebidos para obter a informação que se deseja (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2006). O modelo é baseado em uma estrutura hipotética, descrita no próximo subitem deste trabalho.

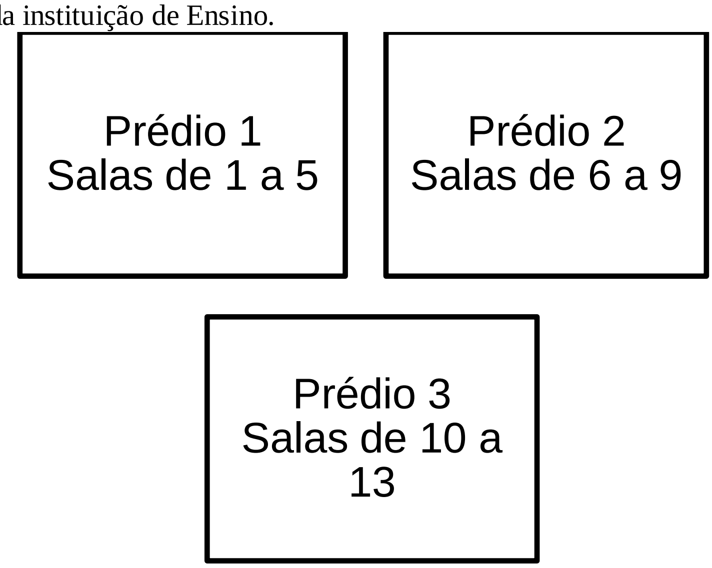
Foi utilizado o software GAMS, com o solver tipo Cplex para a resolução do problema, com uma definição de gap máximo de 0,01, em um computador com processador i-5 e 6 Gb de memória. O método de solução utilizada foi MIP que, de acordo com Brooke, Kendrik e Meeraus (1997) refere-se a problemas de programação inteira mista, que observa as exigências discretas das variáveis, que podem assumir quaisquer valores inteiros entre seus limites.

4 MODELAGEM DO PROBLEMA

Neste modelo é utilizada uma estrutura de programação linear adaptando o modelo de transporte à questão de alocação de salas e programação inteira mista.

Há dois conjuntos considerados: o de disciplina (i) e o de salas (j). Para a demonstração do modelo, considerou-se uma instituição fictícia, com três prédios, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2: Estrutura da instituição de Ensino.



Fonte: Os autores.

Cada prédio está ligado, preferencialmente, a um determinado curso, podendo, conforme disponibilidade e necessidade, alocar disciplinas de outros cursos.

Há 35 disciplinas a serem alocadas e, de acordo com os cursos a que se refere estará distribuída originalmente pelos prédios conforme o Quadro 1:

Quadro 1: Distribuição original de disciplinas por prédio.

Prédio	Disciplinas (i)
1	1 a 7
2	8 a 21
3	22 a 35

Estas disciplinas são ministradas todas em um determinado período em um dia da semana, considerando 1 aula por dia por disciplina. Cada sala comporta 3 aulas por período, em horários sequenciais.

Na Tabela 1 são apresentadas as quantidades de alunos matriculados em cada disciplina q_i e na Tabela 2 são apresentadas as capacidades de alocação de cada sala c_j. As quantidades de alunos matriculados foram geradas por números aleatórios e forma acrescidas quatro disciplinas fictícias para igualar com o número de salas e, também, igualar o total de matriculados com o total da capacidade de salas.

Tabela 1: quantidade de alunos matriculados por disciplina.

q_1	33	q_{14}	45	q_{27}	50
q_2	51	q_{15}	59	q_{28}	50
q_3	41	q_{16}	47	q_{29}	50
q_4	25	q_{17}	48	q_{30}	50
q_5	35	q_{18}	49	q_{31}	50
q_6	46	q_{19}	28	q_{32}	50
q_7	31	q_{20}	42	q_{33}	50
q_8	26	q_{21}	59	q_{34}	50
q_9	46	q_{22}	56	q_{35}	49
q_{10}	53	q_{23}	60	q_{36}	141
q_{11}	57	q_{24}	39	q_{37}	141
q_{12}	28	q_{25}	47	q_{38}	140
q_{13}	33	q_{26}	50	q_{39}	140

Tabela 2: capacidade das salas de aula.

c_1	60	c_{14}	60	c_{27}	50
c_2	60	c_{15}	60	c_{28}	50
c_3	60	c_{16}	60	c_{29}	50
c_4	60	c_{17}	60	c_{30}	50
c_5	60	c_{18}	60	c_{31}	50
c_6	60	c_{19}	35	c_{32}	50
c_7	60	c_{20}	35	c_{33}	50
c_8	60	c_{21}	35	c_{34}	60
c_9	60	c_{22}	50	c_{35}	60
c_{10}	60	c_{23}	50	c_{36}	60
c_{11}	60	c_{24}	50	c_{37}	60
c_{12}	60	c_{25}	50	c_{38}	60
c_{13}	60	c_{26}	50	c_{39}	60

Para respeitar a condição de que somadas demandas deve ser igual a soma das ofertas, ou neste caso, soma de matrículas igual à soma de capacidade de salas, conforme a equação (1):

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \qquad (1)$$

Assim, o modelo tem por função objetivo a equação (2):

$$min \sum_i \sum_j p_{ij} . x_{ij} . q_i \quad \begin{cases} i = 1,2, \dots 39 \\ j = 1,2, \dots 39 \end{cases} \qquad (2)$$

Onde:

p_{ij}: penalidade por alocar a disciplina fora de seu prédio original e/ou em uma sala inadequada.

x_{ij}: variável de alocação, $\begin{cases} 0, caso\ não\ haja\ alocação; \\ 1, caso\ haja\ alocação. \end{cases}$.

q_i: quantidade de alunos matriculados na disciplina i.

Sujeita às restrições

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad (3)$$
$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (4)$$
$$\sum_j x_{ij} . q_i = q_i \qquad (5)$$
$$\sum_j x_{ij} . q_i \leq c_j \qquad (6)$$

Pela expressão (3) garante-se que todos os alunos da disciplina i serão alocados em uma sala j. Pela expressão (4), que toda sala receberá uma disciplina. A expressão (5) garante que a quantidade de alunos matriculados são considerados em sua totalidade e a expressão (6) que a quantidade de alunos matriculados na disciplina i deve ser menos ou igual a capacidade da sala j.

As penalidades por movimentar as turmas das disciplinas entre os prédios são apresentadas na Tabela 3:

Tabela 3: penalidades p_{ij}.

De \ Para	Prédio 1	Prédio 2	Prédio 3
Prédio 1	1	2	3
Prédio 2	2	1	4
Prédio 3	4	3	1

Fonte: os autores

As penalidades das disciplinas fictícias para alocação em qualquer prédio são iguais a zero.

O resultado da distribuição de disciplinas pelas salas após a resolução do modelo é apresentado no Quadro 2:

Quadro 2: Distribuição das disciplinas pelas salas

		1ª aula	2ª aula	3ª aula
Prédio 1	Sala 1		14	3
	Sala 2		2	6
	Sala 3	1	12	7
	Sala 4	13	19	
	Sala 5	5		4
Prédio 2	Sala 6	15	11	10
	Sala 7	24	8	20
	Sala 8	18	16	9
	Sala 9	25	17	21
Prédio 3	Sala 10	26	32	35
	Sala 11	29	31	28
	Sala 12	33	27	23
	Sala 13	34	30	22

Pelo esperado, quatro horários de sala ficaram ociosos, todos no Prédio 1 (primeiras aulas das salas 1 e 2, terceira aula da sala 4 e a segunda aula da sala 5). Todas as disciplinas correspondentes ao curso do Prédio 1 foram alocadas no próprio prédio, que ainda recebeu disciplinas do Prédio 2 (12, 13 e 19). As salas dos Prédios 2 e 3 foram totalmente ocupadas, mesclando as disciplinas dos dois cursos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao se retomar os objetivos deste estudo, o objetivo geral foi alcançado ao se apresentar um modelo que foi capaz de alocar as disciplinas garantindo a ocupação de salas de aula.

Quanto ao objetivo específico, têm-se discutir a aplicação de programação linear e otimização de redes na questão de alocação de espaços, mostrou-se que a programação inteira mista foi a mais adequada, uma vez que as variáveis são discretas e trabalha-se com variáveis binárias para indicar a alocação das disciplinas. O modelo mostrou-se satisfatório permitindo a alocação das disciplinas às salas com o menor deslocamento possível.

Como proposta para trabalhos futuros, propõe-se agregar a disponibilidade dos professores para a alocação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENALES, M. et al. *Pesquisa operacional*. Elsevier. Rio de Janeiro. 2007.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. *Pesquisa operacional para cursos de administração, contabilidade e economia*. Elsevier. Rio de Janeiro. 2012.

BROOKE, A.; KENDRIK, D. MEERAUS, A. *GAMS:* Sistema geral de modelagem algébrica. Edgard Blücher. São Paulo. 1997.

CAIXETA-FILHO, J. V. *Pesquisa operacional:* técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais. 2. ed. Atlas. São Paulo. 2012.

COLIN, E.C. *Pesquisa operacional:* 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. LTC. Rio de Janeiro. 2007.

KRIPKA, R. M. L.; KRIPKA, M. Simulated annealing aplicado na otimização da alocação de salas em instituição de ensino superior. *Mecánica Computacional Vol XXIX*, pp. 9317-9325. Associación Argentina de Mecánica Computacional. Buenos Aires. 2010.

LEE, S. M. *Linear optimization for management.* Petrocelli/Charter. Wisconsin. 1976.

LONGARAY, A.A. *Introdução à pesquisa operacional.* Saraiva. São Paulo. 2013.

PASSOS, E. J. P. F. *Programação linear como instrumento da pesquisa operacional.* Atlas. São Paulo. 2008.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P. B. *Metodologia de pesquisa.* 3. ed. São Paulo. McGraw-Hill. 2006.

SILVA, A. S. N.; SAMPAIO, R. M.; ALVARENGA, G. B. *Uma aplicação de Simulated Annealing para o problema de alocação de salas.* Disponível em: http://www.dcc.ufla.br/infocomp/artigos/v4.3/art08.pdf . Acessado em: 26/06/2014.

WINSTON, W. L. *Operations research:* applications and algorithms. 3. ed. Duxbury Press. Belmont. 1993.